Title	有限母集団からの標本抽出問題の統計的構造 (統計的構造)
Author(s)	森本, 治樹
Citation	数理解析研究所講究録 (1972), 150: 86-89
Issue Date	1972-06
URL	http://hdl.handle.net/2433/106785
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
150巻 1972年 86-89

有限母集団からの標本抽出問題の統計的構造

大阪市大　森本治樹

§1．この報告は，数理解析研究所講究録46に掲載された筆者の報告［1］の続きと補足に当る。

次のような統計的構造（X, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{P}$）を考える。すなわち

（1）Xは非可算集合，（2）$\mathfrak{A}=2^X$，（3）$p\in\mathfrak{P}$はすべて離散型。（4）$\forall p\in\mathfrak{P}$ $p(A)=0$ ならば $A=\phi$。

これはBasu－Ghoshが提案したもので（［2］），それについては上記講究録に渋谷政昭氏の報告（［3］）がある。

［1］において筆者は，Basu－Ghoshの統計的構造において，統計量とはcomplete－field（任意個の和集合の形成について閉じているfield）のことであることを指摘し，$\mathfrak{A}=2^X$自身complete－fieldであるから，Basu－Ghoshの統計的構造を測度論的に扱う上で，incompleteなσ－fieldは考えない方がよいことを主張した。

その後この構造について，いくつかの結果を得たので，以下に列擧する。

§2.

(4) 十分統計量に属する集合の可算和と，その余集合との全体は，pairwise-sufficient σ-field である。(ここで統計量とは分割，すなわち X を覆う素な集合族と考えている。)

(5) pairwise-sufficient σ-field の導く統計量は，sufficient。

(6) 統計量が pairwise-sufficient なら，sufficient。

(7) しかし一般の σ-field が pairwise-sufficient であっても，incomplete ならばもちろん insufficient。その例としては，(4) の σ-field を考えればよい。

(8) σ-field が十分統計量を導き，かつすべての $p \in \mathcal{P}$ に対して $A(p) = \{x \mid p(x) > 0\}$ を含むなら，pairwise-sufficient。

(9) $\mathcal{B}$ を σ-field とする。任意の検定関数 $t(x)$ に対し $\mathcal{B}$-可測検定関数 $s(x)$ が存在して，$^{\forall} p \in \mathcal{P}$ $E_p(t) = E_p(s)$ となるとする。すると $\mathcal{B}$ は $A(p)$ をすべて含み，また十分統計量を導く。

(10) (9) の仮定のもとで，$\mathcal{B}$ が complete (統計量) なら，$\mathcal{B}$ は十分。

(11) σ-field $\mathcal{B}$ が十分統計量を導き，かつこの統計量を

含むための必要十分条件は，各々の $p \in \mathcal{P}$ に対して

$$p(x) = g(x, p) \ h(x) \qquad x \in X$$

が成立つことである。たゞし $g(x, p)$ は $\mathcal{B}$-可測で，$h(x)$ は p に無関係。

§3．前節の (6) と (7)，(10) と (9)，Basu-Ghosh [2] の [Thorem 1] と上の (11) を比較すると，complete-field に対しては dominated な場合と同じことが成立つのに対して，incomplete-field に対しては成立たないということが，一層強調されるであろう。

もう一つ，[1] で主張したように 2^X を complete-field として（σ-field としてでなく）扱うことの利点として，次のことが考えられる。(1)—(4) をみたす２つの統計的構造 $(X, 2^X, \mathcal{P})$，$(Y, 2^Y, Q)$ の“直積”を作ることを考える。$(X \times Y, 2^X \times 2^Y, \mathcal{P} \times Q)$ といったものができるが，$2^X \times 2^Y$（$2^X, 2^Y$ の直積 σ-field）が $2^{X \times Y}$ に一致するかどうかは，容易な問題ではない（難波 [4]）。しかし，$2^X, 2^Y$ の直積 complete-field は $2^{X \times Y}$ であるから，いつもこれらの集合族を complete-field として扱う方が便利である。

（なお，結果の証明その他詳細については [5] 参照）。

参考文献

[1] 森本治樹 "离散分布族の取扱いについて — Basu-Ghosh 論文をめぐって — " 数解研講究録 46 pp. 55 - 61 (1968)

[2] D. Basu & J. K. Ghosh "Sufficient statistics in sampling from a finite universe", 36th sess. Int. Stat. Inst., (1967)

[3] 渋谷政昭 "Basu-Ghosh, 有限母集団からのサンプリングにおける十分統計量, の紹介" 数解研講究録 46, pp. 47 - 54 (1968)

[4] 難波完爾 "測度に関係ある集合論の結果" 本講究録 所收。

[5] H. Morimoto, "Statistical structure of the problem of sampling from finite populations" Ann. Math. Stat., Vol. 43, pp. 528-535 (1972)